

Dạng 3: Dãy số bị chặn

Phương pháp: Sử dụng kiến thức về dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \leq u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên, bị chặn?

a) $u_n = n - 1$

b) $u_n = \frac{n+1}{n+2}$

c) $u_n = \sin n$

d) $u_n = (-1)^{n-1} n^2$

Lời giải

a) Ta có $u_n = n - 1 \geq 0 (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ suy ra u_n bị chặn dưới.

b) Ta có: $u_n = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} < 1; u_n = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} \geq 0 (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ suy ra u_n bị chặn.

c) $u_n = \sin n$ do đó $-1 \leq u_n \leq 1 (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ suy ra u_n bị chặn.

d) Ta có: $u_n = (-1)^{n-1} n^2 > 0$ nếu n là số tự nhiên lẻ.

$u_n = (-1)^{n-1} n^2 < 0$ nếu n là số tự nhiên chẵn.

Dãy không bị chặn trên cũng không bị chặn dưới.

Bài tập 2: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n) với

a) $u_n = \frac{n+1}{n+2}$

b) $u_n = \frac{1-n}{n+1}$

Lời giải

a) Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)^2 - (n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)}$

$= \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ suy ra $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy số tăng.

Mặt khác ta có: $u_n = \frac{n+1}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ suy ra (u_n) bị chặn dưới.

$u_n = 1 - \frac{1}{n+2} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) bị chặn trên.

Ta thấy dãy số (u_n) vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, suy ra dãy số (u_n) bị chặn.

Vậy (u_n) là dãy số tăng và bị chặn.

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } u_{n+1} - u_n &= \frac{1-(n+1)}{n+2} - \frac{1-n}{n+1} = -\frac{n}{n+2} - \frac{1-n}{n+1} \\ &= \frac{-n(n+1) - (1-n)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = -\frac{2}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Do đó (u_n) là dãy số giảm.

$$\text{Do } u_n = \frac{1-n}{n+1} = \frac{-(n+1)+2}{n+1} = -1 + \frac{2}{n+1} > -1, \forall n \geq 1, \text{ nên dãy } (u_n) \text{ bị chặn dưới.}$$

$$\text{Dãy } (u_n) \text{ cũng bị chặn trên vì } u_n = -1 + \frac{2}{n+1} \leq -1 + \frac{2}{1+1} = 0, \forall n \geq 1.$$

Do đó (u_n) là dãy số bị chặn.

Bài tập 3: Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n^2+n}$ bị chặn.

Lời giải

Ta có: $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.

Do $n^2 + n \geq 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên $u_n \leq \frac{1}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ suy ra dãy số (u_n) bị chặn trên. Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

Bài tập 4: Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) cho bởi

$$\text{a) } u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

$$\text{b) } u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } u_n &= \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}. \end{aligned}$$

Do đó: $0 < u_n < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy số bị chặn.

$$\text{b) Ta có: } 0 < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Do đó: $0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy số bị chặn.

Bài tập 5: Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) cho bởi:

$$\text{a) } u_n = \frac{n^2+2n}{n^2+n+1}$$

$$\text{b) } u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+2n+n}}$$

$$c) u_n = (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n}$$

$$d) u_n = \frac{4 \sin n + 4 \cos(3n^2 + 1)}{5n^2 + n}$$

Lời giải

$$a) u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1} = 1 + \frac{n-1}{n^2 + n + 1} \text{ do } 0 \leq \frac{n-1}{n^2 + n + 1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Suy ra $1 \leq u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số đã cho bị chặn.

$$b) u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n + n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \Rightarrow 0 < u_n < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Vậy dãy số đã cho bị chặn.}$$

$$c) u_n = (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n} \Rightarrow |u_n| = \left| \cos \frac{\pi}{2n} \right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Vậy dãy số đã cho bị chặn.}$$

$$d) u_n = \frac{4 \sin n + 3 \cos(3n^2 + 1)}{5n^2 + n} \Rightarrow |u_n| = \frac{|4 \sin n + 3 \cos(3n^2 + 1)|}{5n^2 + n} < \frac{5}{5n^2} < 1.$$

Suy ra: $-1 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số đã cho bị chặn.

Bài tập 5: Một công ty dược phẩm đang thử nghiệm một loại thuốc mới. Một thí nghiệm bắt đầu với $1,0 \cdot 10^9$ vi khuẩn. Một liều thuốc được sử dụng sau mỗi bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \cdot 10^8$ vi khuẩn. Giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25%.

- Viết hệ thức truy hồi cho số lượng vi khuẩn sống trước mỗi lần sử dụng thuốc.
- Tìm số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm.

Lời giải

a) Gọi $u_0 = 1,0 \cdot 10^9$ là số vi khuẩn tại thời điểm ban đầu và u_n là số vi khuẩn trước lần dùng thuốc thứ n .

Do mỗi liều thuốc được sử dụng sau bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \cdot 10^8$ vi khuẩn và giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25% nên ta có

$$u_{n+1} = (u_n - 4,0 \cdot 10^8) + 25\% \cdot u_n = 1,25u_n - 4,0 \cdot 10^8.$$

$$b) \text{ Ta tính } u_5 \text{ như sau: } u_1 = 1,0 \cdot 10^9; u_2 = 1,25u_1 - 4,0 \cdot 10^8 = 8,5 \cdot 10^8$$

$$u_3 = 1,25u_2 - 4,0 \cdot 10^8 = 6,625 \cdot 10^8; u_4 = 1,25u_3 - 4,0 \cdot 10^8 = 4,28125 \cdot 10^8$$

$$u_5 = 1,25u_4 - 4,0 \cdot 10^8 = 1,3515625 \cdot 10^8.$$

Vậy số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm là 135156250 con.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = 3n - 1$

- A. Bị chặn. B. Bị chặn trên. C. Bị chặn dưới. D. Không bị chặn dưới.

Lời giải

Ta có $u_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \rightarrow$ Dãy bị chặn dưới

Khi n tiến tới dương vô cực thì u_n cũng tiến tới dương vô cực nên dãy số không bị chặn trên

Vậy dãy đã cho bị chặn dưới

Câu 2: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

- A. $u_n = n^2$. B. $u_n = 2^n$. C. $u_n = \frac{1}{n}$. D. $u_n = \sqrt{n+1}$.

Lời giải

Ta có: $0 < u_n = \frac{1}{n} \leq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn.

Nhận xét: Các dãy số $n^2; 2^n; n+1$ là các dãy tăng đến vô hạn khi n tăng lên vô hạn nên chúng không bị chặn trên.

Câu 3: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

- A. $u_n = \frac{1}{2^n}$. B. $u_n = 3^n$. C. $u_n = \sqrt{n+1}$. D. $u_n = n^2 + 1$.

Lời giải

Ta có: $0 < u_n = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn.

Câu 4: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$

- A. Bị chặn. B. Không bị chặn. C. Bị chặn trên. D. Bị chặn dưới.

Lời giải

Ta có $0 < u_n = \frac{2n+1}{n+2} < \frac{2n+4}{n+2} = \frac{2(n+2)}{n+2} = 2 \quad \forall n$ nên dãy (u_n) bị chặn.

Câu 5: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n) , biết: $u_n = \frac{2n-13}{3n-2}$

- A. Dãy số tăng, bị chặn.
B. Dãy số giảm, bị chặn.
C. Dãy số không tăng không giảm, không bị chặn.
D. Cả A, B, C đều sai.

Lời giải

Ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{2n-11}{3n+1} - \frac{2n-13}{3n-2} = \frac{34}{(3n+1)(3n-2)} > 0$ với mọi $n \geq 1$.

Suy ra $u_{n+1} > u_n \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy tăng $\Rightarrow$ dãy bị chặn dưới bởi $u_1 = -\frac{9}{4}$.

Mặt khác: $u_n = \frac{2}{3} - \frac{35}{3(3n-2)} \Rightarrow -\frac{9}{4} \leq u_n < \frac{2}{3} \quad \forall n \geq 1$

Vậy dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Câu 6: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

A. Bị chặn. B. Không bị chặn. C. Bị chặn trên. D. Bị chặn dưới.

Lời giải

Ta có: $0 < u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}} = \sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n^2+1}} = \sqrt{1 + \frac{2n}{n^2+1}} \leq \sqrt{1 + \frac{2n}{2n}} = \sqrt{2}, \forall n \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

Câu 7: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = 4 - 3n - n^2$

A. Bị chặn. B. Không bị chặn. C. Bị chặn trên. D. Bị chặn dưới.

Lời giải

Ta có: $u_n = \frac{25}{4} - \left(n + \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{25}{4} \Rightarrow (u_n)$ bị chặn trên; dãy (u_n) không bị chặn dưới.

Câu 8: Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = n + \frac{1}{n}$. B. $u_n = n + 1$. C. $u_n = \frac{n}{2n^2+1}$. D. $u_n = n^2 + n + 1$.

Lời giải

Câu 9: Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = n - \sin 3n$ B. $u_n = \frac{n^2+1}{n}$. C. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. D. $u_n = n \cdot \sin(3n-1)$.

Lời giải

Ta có $0 < u_n = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ Dãy (u_n) với $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ bị chặn

Câu 10: Trong các dãy số (u_n) cho dưới đây dãy số nào là dãy số bị chặn ?

A. $u_n = \frac{n^3}{n^2+1}$. B. $u_n = n^2 + 2017$. C. $u_n = (-1)^n(n+2)$. D. $u_n = \frac{n}{n^2+1}$.

Lời giải

Ta có $0 < u_n = \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ Dãy (u_n) với $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ bị chặn

Câu 11: Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số sau: $(u_n): u_n = \frac{n+1}{n+2}$

- A. Tăng, bị chặn. B. Giảm, bị chặn. C. Tăng, chặn dưới. D. Giảm, chặn trên.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)^2 - (n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0, \forall n.$$

Và $0 < u_n = \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+2} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn.

Câu 12: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n) , biết: $(u_n): u_n = n^3 + 2n + 1$

- A. Tăng, bị chặn. B. Giảm, bị chặn. C. Tăng, chặn dưới. D. Giảm, chặn trên.

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 + 2(n+1) - n^3 - 2n = 3n^2 + 3n + 3 > 0, \forall n$$

Mặt khác: $u_n > 1, \forall n$ và khi n càng lớn thì u_n càng lớn.

Vậy dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn dưới.

Câu 13: Cho dãy số $(u_n): u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

- A. $\frac{1}{3}$. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. 0.

Lời giải

Ta có $u_n = \frac{3n-1}{3n+1} = 1 - \frac{2}{3n+1} < 1$. Mặt khác: $u_2 = \frac{5}{7} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > 0$ nên suy ra dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 1.

Câu 14: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \cos n + \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

- A. 0. B. 1. C. $\sqrt{2}$. D. Không bị chặn trên.

Lời giải

Ta có $u_n \xrightarrow{MTCT} u_1 = \sin 1 + \cos 1 > 1 > 0$ nên loại các đáp án A và B

$$\text{Ta có } u_n = \cos n + \sin n = \sqrt{2} \sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{2}$$

Câu 15: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \cos n + \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào dưới đây?

- A. 0. B. -1. C. $-\sqrt{2}$. D. Không bị chặn dưới.

Lời giải

$$u_n \xrightarrow{MTCT} u_5 = \sin 5 - \cos 5 < -1 < 0 \longrightarrow \text{loại A và B}$$

$$\text{Ta có } u_n = \sqrt{2} \sin\left(n - \frac{\pi}{4}\right) > -\sqrt{2}$$

Câu 16: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

- A.** Bị chặn. **B.** Không bị chặn. **C.** Bị chặn trên. **D.** Bị chặn dưới.

Lời giải

Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Lại có: $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$. Suy ra

$$u_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) < \frac{1}{2} \text{ với mọi số nguyên}$$

dương n , nên (u_n) bị chặn trên.

Câu 17: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n.(n+2)}$

- A.** Bị chặn. **B.** Không bị chặn. **C.** Bị chặn trên. **D.** Bị chặn dưới.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 0 < u_n < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

Dãy (u_n) bị chặn.

Câu 18: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n) , biết: $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

- A.** Dãy số tăng, bị chặn. **B.** Dãy số tăng, bị chặn dưới.
C. Dãy số giảm, bị chặn trên. **D.** Cả A, B, C đều sai.

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \Rightarrow \text{dãy } (u_n) \text{ là dãy số tăng.}$$

$$\text{Do } u_n < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow 1 < u_n < 2, \forall n \geq 1 \Rightarrow \text{dãy } (u_n) \text{ là dãy bị chặn.}$$

Câu 19: Xét tính bị chặn của các dãy số sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 1}, (n \geq 2) \end{cases}$

- A.** Bị chặn. **B.** Không bị chặn. **C.** Bị chặn trên. **D.** Bị chặn dưới.

Lời giải

Bằng quy nạp ta chứng minh được $1 < u_n < 2$ nên dãy (u_n) bị chặn.

Câu 20: Xét tính tăng giảm và bị chặn của dãy số sau: $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}, \forall n \geq 2 \end{cases}$

- A.** Tăng, bị chặn. **B.** Giảm, bị chặn.
C. Tăng, chặn dưới, không bị chặn trên. **D.** Giảm, chặn trên, không bị chặn dưới.

Lời giải

Trước hết bằng quy nạp ta chứng minh: $1 < u_n \leq 2, \forall n$

Điều này đúng với $n=1$, giả sử $1 < u_n < 2$ ta có:

$$1 < u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} < 2 \text{ nên ta có đpcm.}$$

$$\text{Mà } u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n}{2} < 0, \forall n.$$

Vậy dãy (u_n) là dãy giảm và bị chặn.

Câu 21: Cho dãy (u_n) với $u_n = \frac{n+2018}{2018n+1}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. Dãy (u_n) bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên
- B. Dãy (u_n) bị chặn.**
- C. Dãy (u_n) không bị chặn trên, không bị chặn dưới.
- D. Dãy (u_n) bị chặn trên nhưng không bị chặn dưới

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_n = \frac{n+2018}{2018n+1} = \frac{1}{2018} + \frac{2017.2019}{2018(2018n+1)}.$$

Do đó (u_n) là dãy giảm, mà $u_1 = 1$, dễ thấy $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0 \Rightarrow 0 < u_n \leq 1$.

Dãy (u_n) bị chặn.

Câu 22: Trong các dãy số (u_n) có số hạng tổng quát u_n dưới đây, dãy số nào là dãy bị chặn?

- A. $u_n = \sqrt{n^2 + 2}$.
- B. $u_n = \frac{n}{2n+1}$.**
- C. $u_n = 3^n - 1$.
- D. $u_n = n + \frac{2}{n}$.

Lời giải

Ta có: $\lim \sqrt{n^2 + 2} = +\infty \Rightarrow$ dãy số $u_n = \sqrt{n^2 + 2}$ không bị chặn.

$$u_n = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2} \Rightarrow u_n < \frac{1}{2}.$$

Mặt khác ta thấy ngay $u_n = \frac{n}{2n+1} > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < u_n < \frac{1}{2} \Rightarrow$ dãy số $u_n = \frac{n}{2n+1}$ bị chặn.

Câu 23: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2 + 5^{1-n}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. Dãy số không đơn điệu.
- B. Dãy số giảm và không bị chặn.
- C. Dãy số tăng.
- D. Dãy số giảm và bị chặn.**

Lời giải

$$\text{Xét } u_{n+1} - u_n = (2 + 5^{-n}) - (2 + 5^{1-n}) = 5^{-n} - 5^{1-n} = \frac{1}{5^n} - \frac{1}{5^{n-1}} = \frac{1}{5^n} - \frac{5}{5^n} = -\frac{4}{5^n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$\Rightarrow (u_n)$ là dãy số giảm.

Ta có: $u_n = 2 + 5^{1-n} > 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_n = 2 + \frac{5}{5^n} \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ là dãy số bị chặn.

Câu 24: Trong các dãy số sau, dãy nào là dãy số bị chặn?

- A.** $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$. **B.** $u_n = 2n + \sin(n)$. **C.** $u_n = n^2$. **D.** $u_n = n^3 - 1$.

Lời giải

Xét dãy số $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ ta có:

$u_n = \frac{2n+1}{n+1} > 0; \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ dãy (u_n) bị chặn dưới bởi giá trị 0.

$u_n = \frac{2n+1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} < 2; \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ dãy (u_n) bị chặn trên bởi giá trị 2.

$\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Câu 25: Chọn kết luận **sai**:

- A.** Dãy số $(2n-1)$ tăng và bị chặn trên. **B.** Dãy số $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ giảm và bị chặn dưới.
C. Dãy số $\left(-\frac{1}{n}\right)$ tăng và bị chặn trên. **D.** Dãy số $\left(\frac{1}{3 \cdot 2^n}\right)$ giảm và bị chặn dưới.

Lời giải

Đáp án B đúng vì dãy số $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ giảm và bị chặn dưới bởi 0.

Đáp án C đúng vì dãy số $\left(-\frac{1}{n}\right)$ tăng và bị chặn trên bởi 0.

Đáp án D đúng vì dãy số $\left(\frac{1}{3 \cdot 2^n}\right)$ giảm và bị chặn dưới bởi 0.

Đáp án A sai vì dãy số $(2n-1)$ tăng nhưng không bị chặn trên.

Câu 26: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Dãy số bị chặn dưới. **B.** Dãy số bị chặn trên.
C. Dãy số bị chặn. **D.** Không bị chặn.

Lời giải

Xét $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \forall k \geq 2$

Suy ra $u_n < \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} < \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow 0 < u_n < \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Vậy } (u_n) \text{ bị chặn.}$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{n+1}{n+2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+3)(n+2)}$
- b) $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- c) Dãy số (u_n) là dãy số giảm
- d) Dãy (u_n) là dãy số bị chặn.

Lời giải

a) Đúng: Xét $u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^2 + 4n + 4 - (n^2 + 4n + 3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0$.

b) Sai: Suy ra $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Sai: Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

d) Đúng: Ta có: $u_n = \frac{n+1}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mặt khác: $u_n = \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó: $0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) là dãy số bị chặn.

Câu 2: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = n + \frac{1}{n}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- b) Dãy số (u_n) là dãy số tăng
- c) $u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$
- d) Dãy số đã cho bị chặn trên

Lời giải

a) Đúng: Với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$u_{n+1} - u_n = n + 1 + \frac{1}{n+1} - \left(n + \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)n} = \frac{(n+1)n - 1}{(n+1)n} > 0 \text{ (vì } (n+1)n > 1, \forall n \geq 1)$$

b) Đúng: Suy ra $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) là dãy số tăng.

c) Sai: Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $n, \frac{1}{n}$, ta được:

$$n + \frac{1}{n} \geq 2\sqrt{n \cdot \frac{1}{n}} = 2 \text{ hay } u_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

d) Sai: Vì vậy dãy số đã cho bị chặn dưới.

Câu 3: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{2n-13}{3n-2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Dãy số (u_n) có số hạng thứ 10 là $u_{10} = \frac{1}{4}$.

b) Dãy số (u_n) là dãy không tăng, không giảm.

c) Dãy số (u_n) là dãy bị chặn.

d) Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi $\frac{1}{3}$

Lời giải

a) Đúng: $u_{10} = \frac{2 \cdot 10 - 13}{3 \cdot 10 - 2} = \frac{1}{4}$

b) Sai: Ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{2n-11}{3n+1} - \frac{2n-13}{3n-2} = \frac{34}{(3n+1)(3n-2)} > 0$ với mọi $n \geq 1$.

c) Đúng: Suy ra $u_{n+1} > u_n \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy tăng $\Rightarrow$ dãy bị chặn dưới bởi $u_1 = -\frac{9}{4}$.

d) Sai: Mặt khác: $u_n = \frac{2}{3} - \frac{35}{3(3n-2)} \Rightarrow -\frac{9}{4} \leq u_n < \frac{2}{3} \quad \forall n \geq 1$

Vậy dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Câu 4: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{2n+1}{n+2}, n \in \mathbb{N}^*$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Hai số hạng đầu lần lượt là $u_1 = 1; u_2 = \frac{5}{3}$

b) Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

c) Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi $\frac{33}{17}$.

d) Dãy số (u_n) có duy nhất một số hạng nguyên.

Lời giải

a) Sai: Ta có $u_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 2} = 1; u_2 = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4} \neq \frac{5}{3}$

b) Đúng: Ta có $u_n = 2 - \frac{3}{n+2}$ nên khi n tăng thì $\frac{3}{n+2}$ giảm dẫn đến $u_n = 2 - \frac{3}{n+2}$ tăng.

Cho nên dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

c) Sai: Ta có $u_1 \leq u_n = 2 - \frac{3}{n+2} < 2$ do $\frac{3}{n+2} > 0$ nên $u_n = 2 - \frac{3}{n+2} < 2$.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn trên bởi 2.

d) Đúng: Ta có $u_n = 2 - \frac{3}{n+2}$ nên u_n nguyên khi $3|(n+2)$ nghĩa là $\begin{cases} n+2 = \pm 3 \\ n+2 = \pm 1 \end{cases}$ kết hợp với $n \in \mathbb{N}^*$ ta tìm được $n=1$. Vậy (u_n) chỉ có một số hạng nguyên là $u_1 = 1$.

Câu 5: Xét tính đúng sai của các khẳng định sau đây:

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 1 + 3^{1-n}$ là dãy số bị chặn.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$ là dãy số tăng.

c) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^{2n}(2^n + 1)$ là dãy số giảm.

d) Dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 1$ là dãy số không tăng không giảm.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $u_n = 1 + 3^{1-n} = 1 + \frac{3}{3^n} > 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $u_n = 1 + 3^{1-n} = 1 + \frac{3}{3^n} \leq 2 \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $1 < u_n \leq 2 \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn

b) Sai: $u_n = \frac{(-1)^n}{3^n} \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{3}; u_2 = \frac{1}{9}; u_3 = -\frac{1}{27}$ nên dãy số không phải là dãy số tăng,

c) Sai: $u_n = (-1)^{2n}(2^n + 1) = 2^n + 1 \Rightarrow u_1 = 3; u_2 = 5; u_3 = 9$ nên dãy số không phải là dãy số giảm

d) Sai: $u_n = 2n - 1 \Rightarrow u_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 1$

Xét $u_{n+1} - u_n = 2n + 1 - (2n - 1) = 2 > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ là dãy số tăng

Câu 6: Cho dãy số $u_n = \frac{2n-1}{n+1}, n=1, 2, \dots$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số hạng thứ 5 của dãy số là $u_5 = 8$

b) Dãy số đã cho không bị chặn trên

c) Dãy số đã cho là một dãy số tăng

d) Dãy số đã cho bị chặn trên bởi 2025.

Lời giải

a) Sai: $u_n = \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1} \Rightarrow u_5 = 2 - \frac{3}{5+1} = \frac{3}{2}$

b) Sai: $u_n = \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1} \Rightarrow 0 < u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên u_n là dãy số bị chặn.

c) Đúng: $u_{n+1} - u_n = 3\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên u_n là dãy số tăng.

d) Đúng: Dãy số đã cho bị chặn trên bởi 2025.

Câu 7: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^{2022} + 3u_n + 16}{u_n^{2021} - u_n + 11}, \forall n \geq 1. \end{cases}$ Xét tính đúng sai của

các khẳng định sau:

- a) Dãy số (u_n) là dãy số giảm.
- b) Dãy số (u_n) là dãy số giảm và bị chặn trên.
- c) Dãy số (u_n) bị chặn trên.
- d) $u_n \leq 5, \forall n \geq 1$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^{2022} + 3u_n + 16}{u_n^{2021} - u_n + 11} - u_n = \frac{(u_n - 4)^2}{u_n^{2021} - u_n + 11} \geq 0, \forall n \geq 1$ suy ra (u_n) là dãy tăng.

b) Sai: Giả sử dãy bị chặn trên, suy ra dãy có giới hạn hữu hạn, giả sử khi đó $\lim u_n = a$.

Ta có $a = \frac{a^{2022} + 3a + 16}{a^{2021} - a + 11} \Leftrightarrow a = 4 < 5$ vô lí do $u_n \geq 5, \forall n \geq 1$.

c) Sai: Vậy (u_n) là dãy tăng và không bị chặn trên.

d) Sai: Lại có $u_1 = 5$ nên $u_n \geq 5, \forall n \geq 1$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \sqrt{3}\cos n - \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M . Tính $m + M$

Lời giải

Nhận xét: $u_n = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin n - \frac{1}{2}\cos n\right) = 2\sin\left(n - \frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow -2 \leq u_n \leq 2$.

Vậy $m = -2; M = 2$ nên $m + M = 0$

Câu 2: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \sin n - \cos n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào?

Lời giải

Ta có $u_n = \sqrt{2}\sin\left(n - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\sqrt{2}$

Câu 3: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \cos n + \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào?

Ta có $u_n = \cos n + \sin n = \sqrt{2}\sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$

Câu 4: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào?

Lời giải

Ta có $u_n = \frac{3n-1}{3n+1} = 1 - \frac{2}{3n+1} < 1$. Mặt khác: $u_2 = \frac{5}{7} > \frac{1}{2} > \frac{1}{2} > 0$ nên suy ra dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 1.

Câu 5: Vi khuẩn E. Coli sinh sản thông qua một quá trình gọi là quá trình phân đôi. Vi khuẩn E. Coli phân chia làm đôi cứ sau 20 phút. Giả sử tốc độ phân chia này được duy trì trong 12 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 12 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E. Coli trong cơ thể? Giả sử có một nguồn dinh dưỡng vô hạn để vi khuẩn E. Coli duy trì tốc độ phân chia như cũ trong 48 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 48 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E. Coli trong cơ thể?

Lời giải

Giả sử ban đầu có 1 vi khuẩn E. Coli.

Sau 20 phút lần một, số vi khuẩn là $1 \cdot 2 = 2$.

Sau 20 phút lần hai, số vi khuẩn là $2 \cdot 2 = 2^2$.

Sau 20 phút lần ba, số vi khuẩn là $2^2 \cdot 2 = 2^3$.

Sau 20 phút lần bốn, số vi khuẩn là $2^3 \cdot 2 = 2^4$.

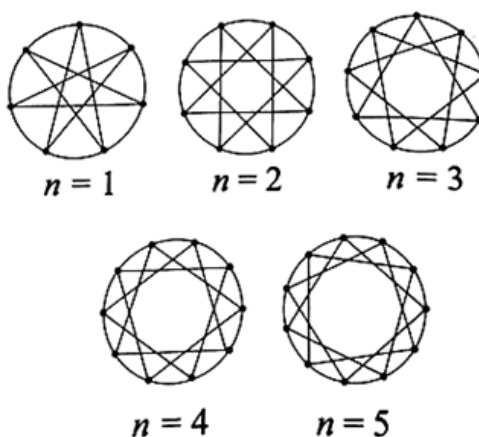
Tương tự như vậy sau 12 giờ (bằng $3 \cdot 12$ lần 20 phút) thì số vi khuẩn là

$$2^{3 \cdot 12} = 2^{36} \approx 6,87 \cdot 10^{10} \text{ (con)}$$

Sau 48 giờ (bằng $3 \cdot 48 = 144$ lần 20 phút) thì số vi khuẩn là:

$$2^{144} \approx 2,23 \cdot 10^{43} \text{ (con)}.$$

Câu 6: Với mỗi số nguyên dương n , lấy $n+6$ điểm cách đều nhau trên đường tròn. Nối mỗi điểm với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn đó để tạo thành các ngôi sao như Hình 1. Gọi u_n là số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao thì ta được dãy số (u_n) . Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n và tính u_6



Lời giải

Ta thấy đường tròn được chia thành $n+6$ cung bằng nhau và mỗi cung có số đo bằng $\left(\frac{360}{n+6}\right)^\circ$. Do mỗi điểm được nối với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn nên góc ở đỉnh của mỗi

ngôi sao là góc nội tiếp chắn $n + 6 - 2.3 = n$ cung bằng nhau đó. Suy ra số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao là $u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{360}{n + 6} \cdot n = \frac{180n}{n + 6} \xrightarrow{n=6} u_6 = 90$.

-----HẾT-----